第14講　図形と方程式(2)

1　円 C：$x^2+y^2=25$ の接線のうち，傾きが7になるものを求めよ．

【Point Pickup】

円の接線

① 円の「　　　」と接線までの距離 ＝「　　　」

② 円と直線の式を連立してできた2次方程式で「　　　　　　」

③ 接線方程式

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］　平面上の 3 点 A(0, 2), B(1, −2), C(−2, 0) に対し，$AP^2=BP^2+CP^2$ を満たす点 P の軌跡を求めよ.

［2］　点 P が円 $x^2+y^2=4$ の周上を動くとき，点 A(8, 0) と点 P を結ぶ線分 AP を AQ：QP＝2：3 に内分する点 Q の軌跡を求めよ.

【Point Pickup】

条件を満たす点の軌跡

→ 軌跡を求めたい点を (x, y) とおき，x, y の満たす条件式から軌跡の形を判断する.

①先に (x, y) とおき，その点を使って条件式をたてる場合

②条件を満たす点を求めて，それを (x, y) をおきかえる場合

に大きく分かれる.

②の場合は，x, y 座標に含まれる「　　　　　　」を消去し，1 つの式につなげる必要がある.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 [1]　実数 x, y が2つの不等式 $x^2+y^2 \leqq 1$, $y \geqq 0$ を同時に満たすとき，$y-x$ の最小値と最大値を求めよ.

[2]　点 (x, y) が領域 $3x+y \geqq 5$ を動くとき，x^2+y の最小値を求めよ.

【Point Pickup】

領域を満たす点の座標を用いた最大・最小

直線や曲線によって囲まれた領域内の点 (x, y) を用いて $f(x, y)$ の最大・最小を考えるとき，

「$f(x, y)$　　　……①」とおき，「　」が最大・最小となるとき①の状態を考える.

領域の境界線の「　　　」がカギを握る.

また，境界が「　　　」の場合は，①がその境界と「　　　　」ときに注意.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第14講　図形と方程式(2)

［1］ 2点A(−1, 4), B(2, 1)に対して，AP：BP＝2：1を満たす点Pの軌跡は，点(ア , イ)を中心とする半径 ウ $\sqrt{\text{エ}}$ の円である．この円と直線 $y=-x+k$ が接するとき，$k=-$ オ , カ である．

［2］ 連立不等式 $y\geqq 0$, $x+y\leqq 4$, $2x+y\leqq 6$, $y-3x\leqq 12$ を満たす領域を D とする．点 (x, y) が領域 D にあるとき，次の問いに答えよ．

(1) $4x-y$ の最大値は キク である．　　(2) $2y-x^2$ の最大値は ケ である．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 14 講　図形と方程式(2)

1	円 C：$x^2+y^2=25$ の接線のうち，傾きが 7 になるものを求めよ．

（解法１）　求める接線を $y=7x+b \iff 7x-y+b=0$ とおくと

この直線と円の中心 (0，0) の距離が半径 5 に等しいので

$\dfrac{|b|}{\sqrt{7^2+(-1)^2}}=5$　　$|b|=25\sqrt{2}$　　$b=\pm 25\sqrt{2}$

よって求める接線は　$\boldsymbol{y=7x\pm 25\sqrt{2}}$

（解法２）　求める接線を $y=7x+b$ とおき，$x^2+y^2=25$ と連立して y を消去すると

$x^2+(7x+b)^2=25 \iff 50x^2+14bx+b^2-25=0$

この式で判別式 $D=0$ であればよい．

よって　$\dfrac{D}{4}=49b^2-50(b^2-25)=0$　　$b^2=2\times 25^2$　　$b=\pm 25\sqrt{2}$

従って求める接線は　$y=7x\pm 25\sqrt{2}$

（解法３）　接点を $(s,\ t)$ とおくと，求める接線は　$sx+ty=25$　とおける．

この直線の傾きが 7 であることより　$-\dfrac{s}{t}=7$　つまり　$s=-7t$　……①

また，$(s,\ t)$ は円周上の点より　$s^2+t^2=25$　……②

①，②より　$(-7t)^2+t^2=25$　　$t^2=\dfrac{1}{2}$　　$t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$s=\mp\dfrac{7}{\sqrt{2}}$（複号同順）

よって求める接線は　$\mp\dfrac{7}{\sqrt{2}}x\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}y=25$　　つまり　$y=7x\pm 25\sqrt{2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］ 平面上の 3 点 A(0, 2), B(1, −2), C(−2, 0) に対し，$AP^2=BP^2+CP^2$ を満たす点 P の軌跡を求めよ.

点 P を $(x,\ y)$ とおくと，$AP^2=BP^2+CP^2$ より

$$x^2+(y-2)^2=(x-1)^2+(y+2)^2+(x+2)^2+y^2$$

$$x^2+y^2+2x+8y+5=0 \qquad (x+1)^2+(y+4)^2=12$$

よって点 P の軌跡は　**中心 (−1, −4)　半径 $2\sqrt{3}$ の円**

2 ［2］ 点 P が円 $x^2+y^2=4$ の周上を動くとき，点 A(8, 0) と点 P を結ぶ線分 AP を AQ：QP＝2：3 に内分する点 Q の軌跡を求めよ.

$P(s,\ t)$ とおくと，線分 AP を 2：3 に内分する点 Q の座標は

$$\left(\frac{3\cdot 8+2\cdot s}{5},\ \frac{3\cdot 0+2\cdot t}{5}\right)=\left(\frac{2s+24}{5},\ \frac{2}{5}t\right)$$

よって，$Q(x,\ y)$ とおくと，$x=\dfrac{2s+24}{5}$，$y=\dfrac{2}{5}t$

これらより，$s=\dfrac{5}{2}x-12$，$t=\dfrac{5}{2}y$

$P(s,\ t)$ は円 $x^2+y^2=4$ 上の点より　$\left(\dfrac{5}{2}x-12\right)^2+\left(\dfrac{5}{2}y\right)^2=4$

$$\left\{\frac{5}{2}\left(x-\frac{24}{5}\right)\right\}^2+\left(\frac{5}{2}y\right)^2=4 \qquad \frac{25}{4}\left(x-\frac{24}{5}\right)^2+\frac{25}{4}y^2=4 \qquad \left(x-\frac{24}{5}\right)^2+y^2=\frac{16}{25}$$

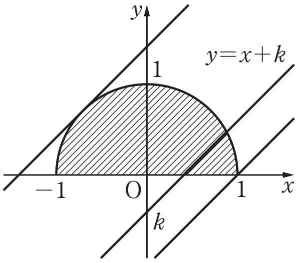
よって求める点 Q の軌跡は　**中心 $\left(\dfrac{24}{5},\ 0\right)$　半径 $\dfrac{4}{5}$ の円**

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 [1]　実数 x, y が2つの不等式 $x^2+y^2 \leqq 1$, $y \geqq 0$ を同時に満たすとき，$y-x$ の最小値と最大値を求めよ.

$x^2+y^2 \leqq 1$, $y \geqq 0$ で表される領域 D は右図斜線部（境界含む）

$y-x=k$ とおき，l：$y=x+k$（傾き1の直線）が領域 D と共有点をもつときの y 切片 k を考える.



k が最小になるのは　l が $(1, 0)$ を通るときで

　　最小値は　$k=y-x=-1$

k が最大になるのは　l が半円と接するときで

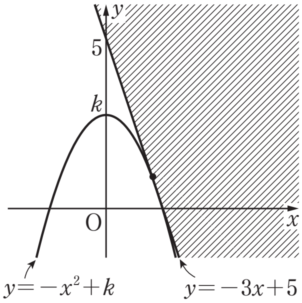
$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=1 \text{ より}\quad k=\pm\sqrt{2}\quad k>0 \text{ より}\quad k=\sqrt{2}$$

よって**最小値 −1**　　**最大値 $\sqrt{2}$**

3 [2]　点 (x, y) が領域 $3x+y \geqq 5$ を動くとき，x^2+y の最小値を求めよ.

$3x+y \geqq 5$ の表す領域 D は右図斜線部（境界含む）

　$x^2+y=k$ とおき，$y=-x^2+k$（軸が $x=0$，上に凸の放物線）が領域 D と共有点をもつときの y 切片 k を考える.



　$y=-x^2+k$ と $y=-3x+5$（領域の境界）を連立して

y を消去すると　$-3x+5=-x^2+k$　　　$x^2-3x+5-k=0$

　この方程式が重解をもつとき，2グラフは接し，このとき k は最小となる.

　判別式 $D=0$　より　$9-4(5-k)=0$　　$k=\dfrac{11}{4}$

よって求める最小値は　$\mathbf{\dfrac{11}{4}}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第14講　図形と方程式(2)

[1]　2点 A$(-1,\ 4)$，B$(2,\ 1)$ に対して，AP：BP＝2：1 を満たす点 P の軌跡は，点 (ア , イ) を中心とする半径 ウ $\sqrt{\text{エ}}$ の円である．この円と直線 $y=-x+k$ が接するとき，$k=-$ オ , カ である．

[2]　連立不等式 $y\geqq 0$，$x+y\leqq 4$，$2x+y\leqq 6$，$y-3x\leqq 12$ を満たす領域を D とする．点 $(x,\ y)$ が領域 D にあるとき，次の問いに答えよ．

(1)　$4x-y$ の最大値は キク である．　　(2)　$2y-x^2$ の最大値は ケ である．

解答例

[1]　P$(x,\ y)$ とおくと，AP：BP＝2：1 より 2BP＝AP　つまり　$4\text{BP}^2=\text{AP}^2$ であることから

$4\{(x-2)^2+(y-1)^2\}=(x+1)^2+(y-4)^2$　　$x^2-6x+y^2+1=0$　　$(x-3)^2+y^2=8$

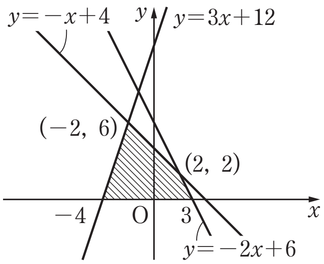
したがって点 P の軌跡は，点 **(3, 0)** を中心とする，半径 $\mathbf{2\sqrt{2}}$ の円である．

この円と直線 $y=-x+k$　つまり　$x+y-k=0$ が接するとき

$\dfrac{|3+0-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$　　$|k-3|=4$　　$k-3=\pm 4$　　したがって　$k=\mathbf{-1,\ 7}$

[2]　$y\geqq 0$，$y\leqq -x+4$，$y\leqq -2x+6$，$y\leqq 3x+12$

を満たす領域 D は右図斜線部分．境界含む．



(1)　$4x-y=k$ とおく．$y=4x-k$（傾き4の直線）が

領域 D と共有点をもつときの k の値の最大値を考える．

k が最大となるのは，直線 $y=4x-k$ の y 切片 $-k$ が最小となるときで，それはこの直線が $(3,\ 0)$ を通るとき．

よって　$0=4\times 3-k$　より　$k=12$

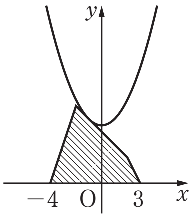
よって求める最大値は **12**

(2)　$2y-x^2=k$ とおく．$y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{k}{2}$（軸が $x=0$ の放物線）が

領域 D と共有点をもつときの k の値の最大値を考える．

k が最大となるのは，頂点の y 座標 $\dfrac{k}{2}$ が最大のときで，

それは放物線が直線 $y=-x+4$ と接するとき．



$\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{k}{2}=-x+4$　より　$x^2+2x+k-8=0$

これが重解をもつとき

$1-(k-8)=0$　$k=9$　（このとき重解 $x=-1$ をもつ）　よって求める最大値は **9**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。